10. Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Probar que X es separable. Deducir que l^∞ no tiene base de Schauder.

Preliminares:

Un **espacio de Banach** es un espacio vetorial normado completo (toda sucesión de Cauchy converge)

Una **base de Schauder** es similar a la usual base (de Hamel) de los espacios vecrtoriales,la diferencia está en que en las combinaciones lineales de bases de Hamel se usan solamente sumas finitas, mientras que para las bases de Schauder se pueden usar sumas infinitas.

Definición: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una suceción $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se llama **base de Schauder**, si cada $x \in X$ tiene una única representación en la serie $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot b_n,\ \xi_n \in \mathbb{K}$.

Un espacio topológico se llama **separable** si tiene un subconjunto que es numerable y denso.

Un conjunto se denomina **infinitamente numerable** si tiene el cardinal de los numeros naturales.

Uno dice que un subconjunto yace **denso** en un espacio métrico cuando todo punto del espacio ambiente se puede aproximar todo lo que uno quiera con un punto del subconjunto. En general, uno dice que un subconjunto A yace denso en un espacio topológico X cuando toda bola de cualquier punto x de X contiene siempre a un elemento de A.

Un **espacio normado** es un espacio vectorial en el que hay definido una norma. Cada espacio normado es con la métrica inducida por la norma un espacio métrico y mas aun con la topología inducida por la métrica un espacio métrico. Si el espacio normado es completo se llamará espacio normado completo ó espacio de Banach.

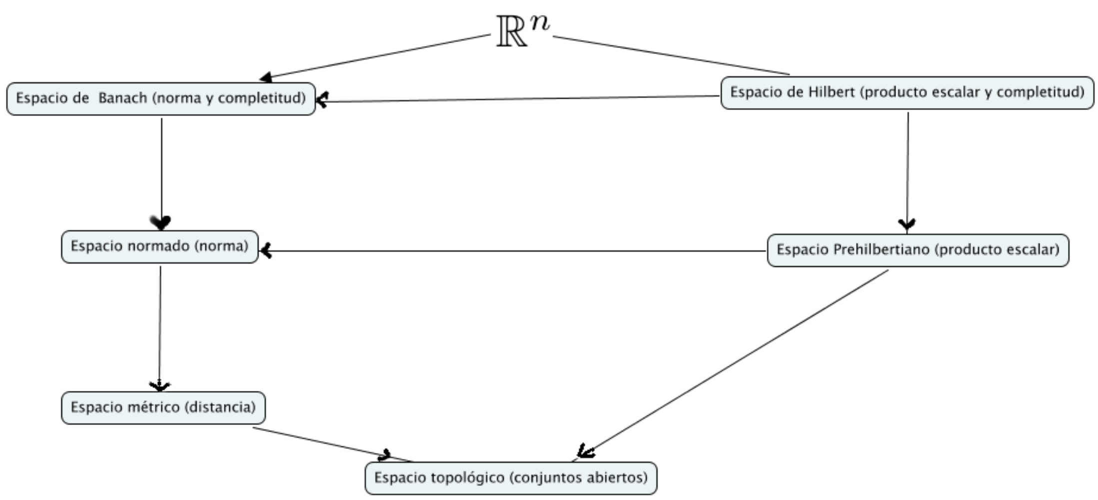


Figure 1: Contexto propio del espacio normado en diferentes tipos de espacios abstractos.

Definición: Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los numeros reales ó complejos y $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_+$ una norma en V, entonces uno llama al par : $(V, \|\cdot\|)$ un **espacio vectorial normado**. Con esto es una norma una aplicación que a elementos del espacio vectorial les asigna un número real no negativo y que satisface tres propiedades, definidad, homogeneidad absoluta y subaditividad.

En primer lugar, veamos que todo espacio normado que admite una base de Schauder es separable.

Únicamente hay que demostrar que:

"existe un subconjunto S del espacio normado X que es denso y numerable."

Sea X un espacio normado. Denotemos por X_n a la base de Schauder en X. Supongamos por simplicidad que X es real.

Busquemos un subconjunto de X que sea denso.

Todo elemento del espacio normado X, se puede expresar como combinación lineal de elementos de la base de Schauder. Es decir, $\forall x \in X \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x_k$ donde $x_k \in X_n$ y $\gamma_k \in \mathbb{R}$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \|x - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k\| < \varepsilon$. Denotemos por S_N a $\sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k$.

De este modo la unión numerable de los conjutos no numerables S_N es no numerable (porque $\gamma_k \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es no numerable). Luego no nos sirve. Nosotros quisieramos encontrar un subconjunto de X que fuera numerable. Gracias a que $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$ podemos encontrar una suma de la forma: $\sum_{n=1}^{N} q_k x_k$ con $q_k \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$\| \sum_{k=1}^{N} q_k x_k - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k\| < \varepsilon$$

Con lo que podemos proceder del siguiente modo:

$$\|x - \sum_{k=1}^{N} q_k x_k\| \overset{\text{desg.triag.}}{<} \|x - S_N\| + \|S_N - \sum_{k=1}^{N} q_k x_k\| < \varepsilon + \| \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k - \sum_{k=1}^{N} q_n x_n\| =$$

$$= \varepsilon + \| \sum_{k=1}^{N} (\gamma_n - q_k) x_k\| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} |q_k - \gamma_k| \|x_k\| \overset{*}{\leq} \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon \|x_k\|}{N\|x_k\|} = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=1}^{N} 1 = 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$*$ Puesto que $\mathbb{Q}$ es denso, sabemos que existen: $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}$ tales que: $|\gamma_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{N\|x_k\|}$.

Luego todo elemento de X se puede aproximar en norma por $S_n = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k$ para todo ε. Luego el conjunto de todas las sumas de la forma $\sum_{k=1}^{N} q_k x_k$ es denso en X. Es decir, el conjunto: $S = \bigcup S_n$ con $S_n = \sum_{k=1}^{n} q_k x_k$, con $q_k \in \mathbb{Q}$, $x_k \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$ es denso en X.

Veamos ahora porque S también es numerable.

Si X_n es una base de Schauder en X, entonces X_n es una familia numerable de vectores en X. Tenemos también que cada q_k esta en $\mathbb{Q}$. Entonces, podemos identificar $S_1 = q_1 x_1 \ \forall q_1 \in \mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}$, $S_2 = q_1 x_1 + q_2 x_2 \ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ... hasta S_n con $\overbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}^{n \ veces}$, lo cual sabemos[1] que es numerable . Por lo tanto, S_n es numerable. S es numerable porque la unión numerable de conjutos numerables[2] es numerable.

En el caso de que X sea un un espacio normado y complejo, la prueba es similar si uno toma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (q_k + i s_k) x_k$ con $q_k, s_k \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$.

□

En segundo lugar, probemos que el espacio de las suceciones reales y acotadas con la norma del supremo l^∞ no tiene base de Schauder.

Puesto que l^∞ es un espacio normado, es suficiente demostrar que l^∞ no es separable.

Para ello, veamos que todo subconjunto denso es no numerable.

Sea B un subconjunto denso de l^∞. Y sea A $\subset$ l^∞ el conjunto de todas las sucesiones compuestas por ceros y unos cuyo cardinal es no numerable (mayor que $card(\mathbb{N})$; de hecho es $\mathfrak{c}$ el cardinal del continuo)[3]. Si $card(B) \geq card(A)$, entonces es B no numerable.

Veamos porque el cardinal de B mayor igual al cardinal de A es.

Sean $a = (a_k)$ y $d = (d_k)$ dos elementos distintos de A, es decir, dos sucesiones distintas compuestas de ceros y unos ($a, d \in A$ y $a \neq d$). Entonces $\|a - d\|_\infty = 1$ y por lo tanto $B_{d_\infty}(a, \frac{1}{3}) \cap B_{d_\infty}(d, \frac{1}{3}) = \emptyset$

Por otro lado, todo subconjunto denso B tiene al menos un punto en cada una de estas bolas. Por lo tanto $card(B) \geq card(A)$. Luego, todos los subconjuntos densos de l^∞ son no numerables. Luego, no hay subconjutno denso y numerable; l^∞ es no separable.

$\square$

Notas

1- Sabemos que se puede establecer una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ y consecuentemente card($\mathbb{N}$)=card($\mathbb{Q}$).

La aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & 2^n 3^m \end{array}$ es inyectiva, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Si $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ son biyeciones,

La aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$ también lo es, y se concluye que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.

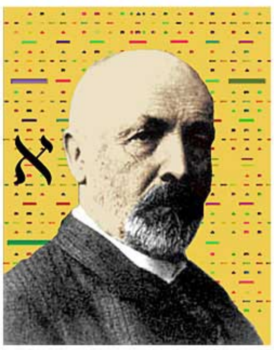
Es inmediato ahora ver que $\overbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}^{n\ veces}$ también es numerable.

2- Referencia [*] 2

3- Se puede ver de varias maneras, pero la mas fácil posiblemente sea la siguiente:

$$X_S(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in \text{ S} \\ 0, & \text{si } n \notin \text{ S} \end{cases} \quad \text{donde S es un subconjunto de } \mathbb{N}$$

Entonces, $X_S = (X_S(n))_{n=1}^\infty$ es una sucesión de unos y ceros. El conjunto de todas estas suceciones X_S (es el conjunto A usado en el apartado b) se identifica con el conjunto de todos los subconjuntos S de $\mathbb{N}$, i.e., con el conjunto potencia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ cuyo cardinal es el continuo $\mathfrak{c} = 2^{card(\mathbb{N})} > card(\mathbb{N})$. Prueba gracias a Georg Cantor en su primera prueba de innumerabilidad (1874) y después de forma mas simple en su Argumento de la diagonal de Cantor.



Georg Cantor 1845 - 1918