10. Sei X ein Banachraum mit Schauderbasis. Zeigen Sie dass X separabel ist. Finden Sie heraus dass l^∞ keine Schauderbasis hat.

Ein **Banach-Raum** ist ein vollständiger (jede Cauchy-Folge konvergiert) normierter Vektorraum.

Eine **Schauderbasis** ist ähnlich zu den üblichen (Hamel) Basis eines Vektorraums, der Unterschied ist, dass Hamel-Basen Linearkombinationen, dass endliche Summen sind zu verwenden, während für Schauderbasen sie unendliche Summen werden kann.

In der Funktionalanalysis wird eine abzählbare Menge $\{b_n\}$ eines Banachraums, deren lineare Hülle dicht im ganzen Raum ist, als **Schauderbasis** bezeichnet, falls jeder Vektor bezüglich ihr eine eindeutige Darstellung als (unendliche) Linearkombination hat.

Definition: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über dem Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **Schauderbasis**, falls jedes $x \in X$ eindeutig als konvergente Reihe $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot b_n,\ \xi \in \mathbb{K}$, dargestellt werden kann.

Erinnern Sie sich daran, dass ein topologischer Raum heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

Eine Menge A wird als **abzählbar unendlich** bezeichnet, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Zu den **höchstens abzählbaren** Mengen zählen neben den abzählbar unendlichen auch kleinere, also endliche Mengen (eine Menge mit endlich vielen Elementen.) Die Verwendung des Begriffes abzählbar ist nicht einheitlich. Er kann je nach Definition sowohl abzählbar unendlich als auch höchstens abzählbar bedeuten.

Man sagt von einer Teilmenge, sie liege **dicht** in einem metrischen Raum, wenn man jeden Punkt des Gesamtraums beliebig genau durch einen Punkt aus der Teilmenge approximieren kann. Allgemeiner sagt man von einer Teilmenge A, sie liege dicht in einem topologischen Raum X, wenn jede Umgebung eines beliebigen Punktes x aus X immer auch ein Element aus A enthält.

Definition: Sei (X,T) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge M liegt genau dann **dicht** in X, wenn eine der folgenden gleichwertigen Aussagen zutrifft:
1) Der Abschluss von M stimmt mit X überein.
2) Es gibt keine abgeschlossene Teilmenge von X außer X selbst, die M enthält.
3) Jede Umgebung in X enthält einen Punkt aus M.

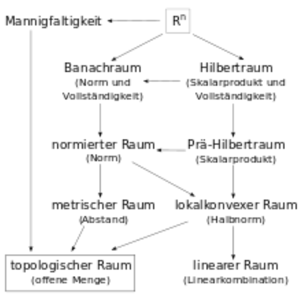

Figure 1: Einordnung normierter Räume in verschiedene Arten abstrakter Räume der Mathematik.

Ein **normierter Raum** ist ein Vektorraum, auf dem eine Norm definiert ist. Jeder normierte Raum ist mit der durch die Norm induzierten Metrik ein metrischer Raum und weiterhin mit der durch die Metrik induzierten Topologie ein topologischer Raum. Eine so induzierte Topologie heißt Normtopologie.

Ist ein normierter Raum vollständig, so nennt man ihn vollständiger normierter Raum oder Banachraum.

Definition: Ist V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen und $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_+$ eine Norm auf V, dann nennt man das Paar $(V, \|\cdot\|)$ einen **normierten Vektorraum**. Eine Norm ist dabei eine Abbildung, die einem Element des Vektorraums eine nicht-negative reelle Zahl zuordnet und die drei Eigenschaften Definitheit, absolute Homogenität und Subadditivität besitzt.

Erstens, lasst uns sehen, dass jeder normierte Raum mit einer Schauderbasis separabel ist.

Nur so viel sei bewiesen:

”es gibt eine Teilmenge S mit einem normierten Raum, die dicht und abzählbar ist.”

Sei X ein nomierter Raum. Wenn X real ist und X_n eine Schauderbasis in, dann ist die Menge: $S = \bigcup S_n$ mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$, mit $p_k \in \mathbb{Q}$, $x_k \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Sehen wir, dass S abzählbar ist.

Wenn X_n eine Schauderbasis in X ist, dann ist X_n eine abzählbare Familie von Vektoren in X. Wir auch haben dass p_k in $\mathbb{Q}$ sind. Also, können wir S_n mit $\mathbb{Q} \times \overbrace{\cdots}^{n} \times \mathbb{Q}$ identifizieren, welches abzählbar ist (S_1 mit $\mathbb{Q}, S_2$ mit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \ldots$). Also ist S_n abzählbar. S ist abzählbar, weil die abzählbare Vereinigungsmenge von abzählbaren Mengen abzählbar ist.

Sehen wir jetzt warum S auch dicht ist.

Sei $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k x_k$, wo bei x_k wieder ein Element von die Schauderbasis X_n ist. Also $x \in X$. Und berücksichtigen wir $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\|x - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k\| < \varepsilon$. Sei $S_N = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k$ und auch, erhalt $M = max_{1 \le i \le N}^{x_i \in X_n} \{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|\}$. Für $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dichte ist, es gibt: $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{Q}$ so dass: $|\gamma_k - p_k| < \frac{\varepsilon}{NM}$

$\|x - \sum_{k=1}^{N} p_k x_k\| < \|x - S_N\| + \|S_N - \sum_{k=1}^{N} p_k x_k\| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{N} |p_k x_k| \|x_k\| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

Falls X einen normierter und komplexer Raum ist, der Beweis ähnliche ist wenn man nimmt: $S_n = \sum_{k=1}^{n} (p_k + iq_k) x_k$ mit $p_k, q_k \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$.

□

Zweitens, beweisen wir dass der Raum der Reelle beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm l^∞ keine Schauderbasis hat.

Für l^∞ ein normierter Raum ist, ist es genug zu beweisen dass l^∞ nicht separabel ist.

Sei B eine dichte Teilmenge von l^∞. Sei A $\subset$ l^∞ die Menge von Folgen bestehend aus Nullen und Einsen (Die Folgen sind die Punkte unserer Topologie). Dann, die Kardinalzahlen von A ist nicht abzählbar (große $|\mathbb{N}|$) und wenn $|B| \ge |A|$, dann ist B nicht abzählbar.

Zeigen wir warum die Kardinalzahlen von B größe gleich die Kardinalzahlen von A ist:
Sei $a = (a_k)$ und $d = (d_k)$ zwei unterschiedliche Folgen bestehend aus Nullen und Einsen ($a, d \in A$ und $a \ne d$). Also dann $\Rightarrow \|a - d\|_\infty = 1$ und auch $\Rightarrow B_{d_\infty}(a, \frac{1}{3}) \cap B_{d_\infty}(d, \frac{1}{3}) = \emptyset$
Auf der anderen Seite hat jeder dichte Teilmenge mindestens einen Punkt in jeder dieser Kugeln. Deshalb $|B| \ge |A|$.

Also dann, jeder dichte Teilmenge von l^∞ ist nicht abzählbar. Also, es gibt keine dichte und abzählbare Teilmenge, und so, ist l^∞ nicht separabel.

□