

9. Sea un operador de multiplicación definido por $Tf = g \cdot f$. Dar condiciones sobre la función g para que $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, esté bien definido, sea acotado, sea autoadjunto o sea una proyección. Calcular su norma.

Sabemos que el operador es lineal. Observemos que las siguientes situaciones están muy relacionadas.

- 1) T_g bien definida (i.e., $\rightarrow L^2([0, 1])$)
- 2) $\|T_g f\|_2 \leq m \|f\|_2$ (i.e., T_g está acotado)
- 3) $\|T_g\|_{op} \leq m$ (i.e., La norma del operador está acotada.)

Para ver que $f \cdot g \in L^2$ podemos proceder del siguiente modo:

$$\int_0^1 |f(x)g(x)|^2 dx \leq M^2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx (< +\infty)$$

Lo cual está en $\mathbf{R}$ porque $f \in L^2$. En la desigualdad hemos supuesto que g está acotada, es decir que: $\exists M > 0 : |g(x)| \leq M \quad \forall x \in [0, 1]$ con lo cual, si g está acotada T_g está bien definido.

Sin embargo, no es necesario que g esté acotada para que T_g esté bien definido. Porque si tomamos una función g definida como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 1/n, \quad n \in \mathbf{N} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

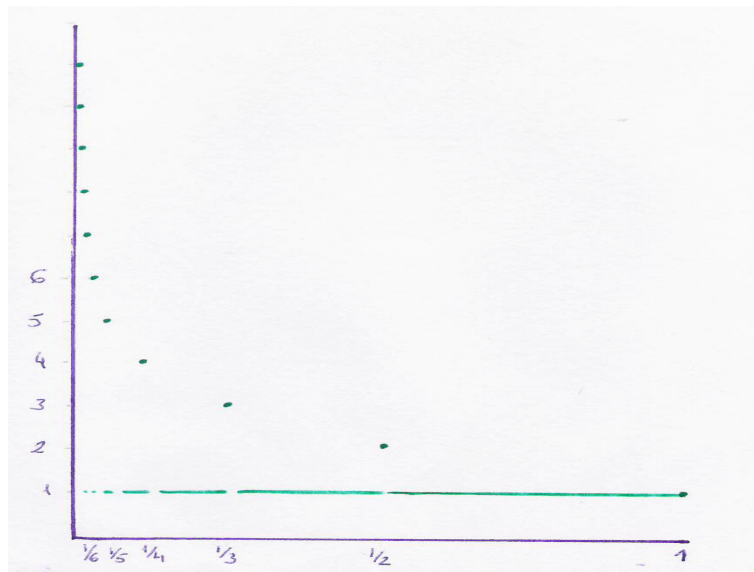


Figure 1: Representación de una función esencialmente acotada.

Vemos que aunque g no está acotada, g supera cotas únicamente en conjuntos de medida nula. Así definida, g permite a T_g estar bien definido. Luego, como vemos, **basta con que g esté esencialmente acotada** ($\exists M > 0 : |g(x)| \leq M \quad e.c.t \quad x \in [0, 1]$) **para que T_g esté bien definido**. Porque el valor de la integral se conserva mientras g toma diferentes valores en conjuntos de medida nula.

Al mismo tiempo, esta ecuación nos está diciendo que el operador está acotado.

$$\|Tf\|_2 = \left(\int_0^1 |gf|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |Mf|^2 \right)^{1/2} = (M^2)^{1/2} \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} = M \|f\|_2$$

Como vemos, que esté bien definido es equivalente a que esté acotado.

Si de entre todas las cotas posibles M tomamos la menor (m), tenemos:

$$m = \inf\{M > 0 : |g(x)| \leq M \text{ e.c.t. } x \in [0, 1]\} = \sup\{|g(x)| : \text{e.c.t. } x \in [0, 1]\} = \|g\|_{\infty, [0, 1]}$$

El máximo de g existe porque g está acotada y está definida en un cjo acotado. El mínimo de los M existe porque el conjunto de todos los tales M es cerrado, no vacío y acotado por debajo.

Con lo cual: $\|Tf\|_2 \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_2$. Pensando intuitivamente, el operador acotado T_g nunca "alarga" cualquier vector f por un factor mayor que $\|g\|_{\infty}$

$$\text{Además: } \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} \leq \|g\|_{\infty} \quad \forall f \in L^2([0, 1]) \setminus \{f = 0\}$$

$$\text{Y por lo tanto: } \|T_g\|_{op} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T_g f\|_2}{\|f\|_2} \leq \|g\|_{\infty}$$

La condición "g esencialmente acotada" es suficiente para que T_g esté bien definido. Pero es necesaria? Veamos que sí. Probemos que ésta es la condición mas fina que se puede dar mediante el contrarecípoco: **g no esencialmente acotada $\Rightarrow T_g$ no bien definido.**

Buscamos $f \in L^2$ tal que $g \cdot f \notin L^2$.

Tomamos $A_n = \{x \in [0, 1], n-1 \leq |g(x)| < n\}$

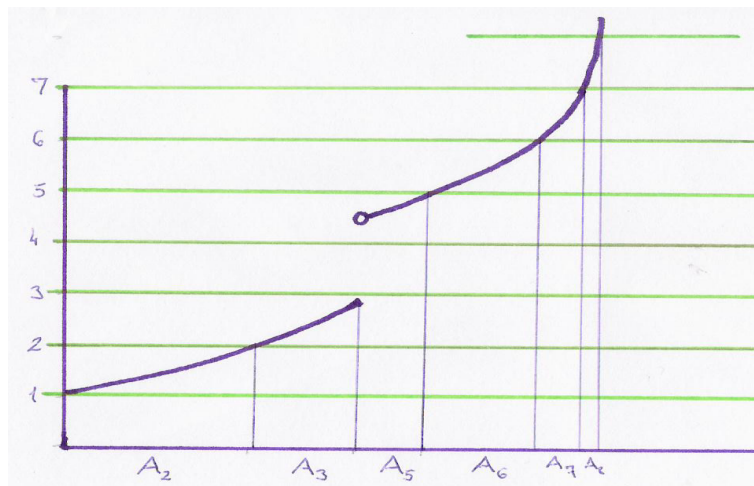


Figure 2: Representación de los A_n para una g esencialmente no acotada.

Sin embargo, no es del todo cierto que $m(A_n) > 0 \quad \forall n$, porque algunos A_n podrían ser intervalos de medida nula ó incluso conjuntos vacíos. Pero sabemos que existen infinitos n tales que $m(A_n) > 0$ porque estamos suponiendo que g está NO esencialmente acotada i.e., $\forall M > 0 \quad m(x \in [0, 1] : |g(x)| > M) > 0$

Tomando $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_{A_n}$ hay que ver si $f \in L^2$

$$\text{Entonces, } \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_{A_n}(x) \right|^2 dx =$$

cuyo integrando no es una suma al cuadrado. Veamoslo con el caso n desde 1 hasta 2: $(a_1 X_{A_1} + a_2 X_{A_2})^2 = (a_1^2 X_{A_1} + a_2^2 X_{A_2})$ porque $X_{A_i}(x) X_{A_j}(x) = \delta_{ij}$ (Kronecker) porque todos los A_i son disjuntos. Luego,

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 X_{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x=0}^{x=1} a_n^2 X_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 m(A_n)$$

y queremos ver que esta serie converge (efectivamente probando que $f \in L^2$).

También debe cumplirse que $f \cdot g \notin L^2$

$$\int_0^1 |g(x) \sum_1^\infty a_n X_{A_n}|^2 dx = \sum_{n=1}^\infty a_n^2 \int_{A_n} |g(x) X_{A_n}(x)|^2 dx \geq \sum_{n=1}^\infty a_n^2 (n-1)^2 m(A_n)$$

donde hemos utilizado que $|g(x)|^2 \geq (n-1)^2 \forall x \in A_n$

Notemos que la serie $\sum_1^\infty a_n^2 (n-1)^2 m(A_n)$ tiene una convergencia equivalente a $\sum_1^\infty a_n^2 n^2 m(A_n)$

Si esta serie diverge entonces $g \cdot f \notin L^2$ y entonces T_g no está bien definido. Sólo falta probar que existen a_n tales que:

$$- \sum_1^\infty a_n^2 m(A_n) < +\infty \quad \& \quad \sum_1^\infty a_n^2 n^2 m(A_n) = \infty$$

Este problema de convergencia de series puede ser abordado de al menos dos formas distintas:

1ª forma : Cancelando $m(A_n)$.

Si tomamos $a_n = \frac{b_n}{\sqrt{m(A_n)}}$ nos queda:

$$- \sum_1^\infty b_n^2 < +\infty \quad \& \quad \sum_1^\infty b_n^2 n^2 = \infty$$

Y si ahora tomamos $b_n = 1/n$ tenemos lo que buscamos:

$$- \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty \quad \& \quad \sum_1^\infty n/n = \infty$$

2ª forma : Utilizando la definición de los conjuntos A_n para acotar su medida.

Por la definición de A_n sabemos que $n-1 \leq |g(x)| < n \quad \forall x \in A_n$. Luego, multiplicando por $X_{A_n}(x)$ nos queda : $(n-1)X_{A_n} \leq |g| \cdot X_{A_n} \leq nX_{A_n}$. Integrando en A_n los tres miembros : $(n-1)m(A_n) \leq \int_{A_n} |g| \leq n \cdot m(A_n)$

Despejando las medidas en ambos lados y enchufandolas en las sumas nos queda:

$$\sum_1^\infty a_n^2 m(A_n) \leq \sum_1^\infty a_n^2 \frac{1}{n-1} \int_{A_n} |g| = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n-1)} < +\infty$$

$$\sum_1^\infty a_n^2 n^2 m(A_n) \geq \sum_1^\infty a_n^2 \frac{n^2}{n} \int_{A_n} |g| = \sum_1^\infty \frac{n^2}{n \cdot n} = \infty$$

Donde para las igualdades hemos tomado el a_n tal que en la segunda serie cancela para dejar un 1 en los sumandos, i.e., $a_n = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \int_{A_n} |g|}}$

Veamos cuando es T autoadjunto ($T_g(f) = T_g^*(h)$)

Para ello calculemos el adjunto T_g^* por la defición $((T_g(f) | h) = (f | T_g^*(h)))$.

$$(T_g(f) | h) = (g \cdot f | h) = \int_0^1 g \cdot f \cdot \bar{h}$$

$$(f | T_g^*(h) = \int_0^1 f \cdot \overline{T_g^*(h)}$$

Luego, $\overline{T_g^*(h)} = g \cdot \bar{h}$ id est, $T_g^*(h) = \bar{g} \cdot h$ e.c.t. $x \in A$, $\forall A \in [0,1]$ medible. Hay que notar que este último paso es gracias a un teorema aplicable cuando las integrales coinciden en todo conjunto medible en $[0,1]$. Si lo pensamos, diferentes funciones integradas entre 0 y 1 pueden devolver el mismo valor sin ser la misma función.

Entonces, para que T sea autoadjunto debe cumplirse $g \cdot f = \bar{g} \cdot f \quad \forall f \in L^2$ en particular para $f = X_{[0,1]}(x) \Rightarrow$ podemos dividir por f en ambos lados y nos queda: $g = \bar{g} \Rightarrow \underline{g(x) \in \mathbf{R}}$

Veamos cuando es T una proyección ($T \circ T = T$)

$$g \cdot g \cdot f = g \cdot f$$

Podría ocurrir $f = 0$, pero debe cumplirse $\forall f \in L^2 \Rightarrow g^2 = g \Leftrightarrow g = 0 \text{ ó } g = 1$.

Si denotamos por B al conjunto donde g vale 1, T es proyección si g es de la forma:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ en } B \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

es decir, si $g(x) = X_B(x)$ para cualquier subconjunto B de $[0,1]$.

Calculemos la norma del operador.

$\|T_g\|_{op} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T_g f\|_{L^2}}{\|f\|_2}$ Si aquí tomamos por f una función en particular f_ε , tenemos:

$$\|T_g\|_{op} \geq \frac{\|T_g f_\varepsilon\|}{\|f_\varepsilon\|} \quad \text{donde } f_\varepsilon = X_{A_\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad A_\varepsilon = \{x \in [0,1] : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$$

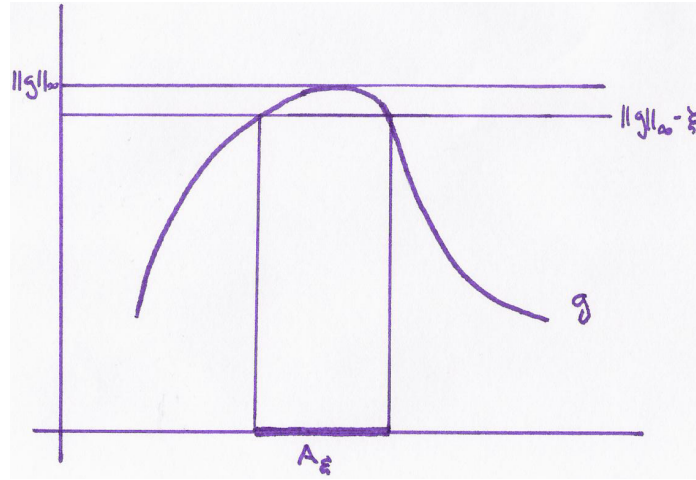


Figure 3: Representación de A_ε . Observa-se que $m(A_\varepsilon) > 0$ siempre que $\varepsilon > 0$

Así construida, se puede observar que $f \in L^2([0,1])$ y que $f \neq 0$. Luego:

$$\begin{aligned} \|T_g\|_{op} &\geq \frac{\|T_g f_\varepsilon\|}{\|f_\varepsilon\|} = \frac{(\int_0^1 |X_{A_\varepsilon}(x)g(x)|^2 dx)^{1/2}}{(\int_0^1 |X_{A_\varepsilon}(x)|^2 dx)^{1/2}} \geq \frac{(\int_0^1 |X_{A_\varepsilon}(x)(\|g\|_\infty - \varepsilon)|^2 dx)^{1/2}}{(\int_0^1 X_{A_\varepsilon}(x) dx)^{1/2}} \\ &= \frac{(\int_0^1 X_{A_\varepsilon}(x) dx (\|g\|_\infty - \varepsilon)^2)^{1/2}}{(m(A_\varepsilon))^{1/2}} = \frac{(m(A_\varepsilon)(\|g\|_\infty - \varepsilon)^2)^{1/2}}{m(A_\varepsilon)^{1/2}} = \frac{(m(A_\varepsilon))^{1/2}(\|g\|_\infty - \varepsilon)}{m(A_\varepsilon)^{1/2}} = \|g\|_\infty - \varepsilon \end{aligned}$$

Y esto debe cumplirse $\forall \varepsilon > 0$, luego $\|T_g\|_{op} \geq \|g\|_\infty$

Por otro lado teníamos que: $\|T_g\|_{op} \leq \|g\|_\infty$

Por lo tanto, todo operador de multiplicación T_g está acotado con norma de operador:

$$\|T_g\|_{op} = \|g\|_\infty$$